数理解析研究所講究録 1333 巻 2003 年 130-144

セクター理論と Cuntz-環

京都大学数理解析研究所
小嶋　泉

1　はじめに

『Cuntz-環のフラクタル集合上の表現と数理物理への応用』という研究会のタイトル後半部分=「Cuntz-環の数理物理への応用」，の文脈ゆえにフラクタルには縁のなかった私が，《セクター理論と Cuntz-環》という題目でお話をする羽目になってしまった。研究会の折には，セクター理論やその Cuntz 環とのつながりを論ずるより前に，Cuntz 環導入を可能にする相対論的量子場理論の基本的諸前提（荒木-Haag-Kastler の代数的場の量子論，特にその net $\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ of local observables の概念とそれに伴う Property B，局所環 $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ の type III）の説明に多くの時間を割かねばならなかった。しかし，この部分についてはよい教科書がある（例えば，[1]）ので簡単に済ませ，ここでは普段議論されることの少ない物理的側面を少し考えてみることにしたい。

2　Superselection sector の概念

作用素環の文脈で Cuntz 環やそれに関連したセクター理論を扱う数学者の間では，C*-環 $\mathfrak{A}$ の内部準同型（endomorphisms）の作る半群 $End(\mathfrak{A})$ を内部自己同型群 $Inn(\mathfrak{A}) := \{Ad(u) \in Aut(\mathfrak{A}); u \in \mathfrak{A}, u^*u = uu^* = \mathbf{1}\}$ で割ったもの, $End(\mathfrak{A})/Inn(\mathfrak{A})$, として“sector” を定義するのが標準的理解のようである。Naïve な物理屋の眼からすると，この形ではなぜこれが “sector” という意味を持つのかわかりにくいだけではなく，他方，これは“sector” が現れる状況として Doplicher-Roberts superselection theory という重要だが特殊な場合における１つの実現形態に過ぎないという点で不満がある。

まず superselection sector の物理的・歴史的由来を振り返ってみると，元々それは，量子論の理論構成で本質的に重要な「原理」の１つと見なされた「重ね合わせの原理」superposition principle の適用に制限をもたらす「例外」状況として認識されるようになったものである。即ち，ψ_1, ψ_2 が量子状態を記述する状態ベクトル ($\|\psi_i\| = 1$) ならそれらの superposition $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 =: \psi$ も「常に」 (i.e., $\forall c_i \in \mathbb{C}$ s.t. $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$) 一つの量子状態を表わす，というのが“superposition principle”。しかるに，$\psi_1 = \psi_e, \psi_2 = \psi_P$ が各々電子，陽子の状態ベクトルという場合にこれを適用し量子論の標準的解釈に従うと，ψ が記述すべき物理的状況は，それぞれ確率 $|c_1|^2$ および $|c_2|^2$ で電子，陽子が見出されるが，観測しない限りそれ自身では電子でも陽子でもない状態（いわゆる“Schrödinger-cat state”），だという理解になる。しかし，

電子・陽子は古典的に区別可能（例えば，重粒子数・軽粒子数，電荷，質量等によって）なのでこんな「ネコ状態」は現実には「無意味」であり，この場合に superposition principle を適用すべきではない，というふうに解釈された。このような状況の下で superposition principle を無制限に適用してよい状態ベクトルの作る部分空間のことを“*superselection sector*”（または“*coherent subspace*”）と呼び，superposition principle の適用に対する「制限」それ自体を「超選択則」(*superselection rule*) と呼ぶようになったのである。

状態ベクトルの Hilbert 空間とそこでの superposition principle から出発する標準的・物理的な量子論の定式化にこだわらず，より一般的な代数的定式化を基本にすれば，別に $c_1\psi_e + c_2\psi_P$ というような「状態ベクトル」を扱うことを「禁止」する理由はもちろん全くない。電子・陽子が古典的に区別可能ということが意味するのは，その両者の間の状態遷移を引き起こす観測可能な物理量がないということで，任意の物理的観測量 A は

$$A \longmapsto \pi(A) = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc} \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_e & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & A_p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots \end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} \vdots \\ (e \\ (P \\ \vdots \end{array}$$

というような「ブロック対角的」な形で可約に表現され，

$$\begin{aligned} \langle\psi \mid \pi(A)\psi\rangle &= |c_1|^2 \langle\psi_e \mid A_e\psi_e\rangle + |c_P|^2 \langle\psi_P \mid A_P\psi_P\rangle \\ &= Tr(|c_1|^2 \mid \psi_e\rangle\langle\psi_e \mid A_e + |c_P|^2 \mid \psi_P\rangle\langle\psi_P \mid A_P) \\ &= Tr\rho_\psi\pi(A) \end{aligned}$$

となる。したがって，状態ベクトル $c_1\psi_e+c_2\psi_P$ の “superposition” は見掛けだけで，実際には density operator $\rho_\psi = |c_1|^2 \mid \psi_e\rangle\langle\psi_e \mid + |c_P|^2 \mid \psi_P\rangle\langle\psi_P \mid$ で与えられた「干渉効果」なしの mixed state と等価になる。つまり，観測の如何に依らず電子・陽子が見つかる確率が各々 $|c_1|^2$，$|c_2|^2$ で与えられる統計的混合を表わす，ということに「過ぎない」。更に詳しく考察すると，上の観測量の「ブロック」構造が，電子と陽子の区別を可能にする適当な物理量 C（重粒子数・軽粒子数，電荷，質量の函数 $C = F(n_B, n_l, e, m)$, s.t. $C\psi_e = F(0,1,-1,m_e)\psi_e$, $C\psi_P = F(1,0,1,m_P)\psi_P, F(0,1,-1,m_e) \neq F(1,0,1,m_P)$ が見つかればよい）の「同時対角化」に対応して，C はそれ自身観測量であると同時に全ての観測量 $\pi(A)$ と交換可能 $[C,\pi(A)]=0$ で，観測量の全体 $\mathfrak{A}$ の（表現 π の）中心に属する，ということになる：$C \in \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) := \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})'$。Superselection rule の一般的本質は，この非自明な中心の存在，$\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) \neq \mathbb{C}1$, にある。

このような superselection rule の存在が奇妙な「例外」的状況として物理屋の目に映った理由は，状態ベクトルの Hilbert 空間から出発し，《ベトクル状態＝純粋状態／密度行列＝混合状態》という「思い込み」を先行させる量子論の標準的定式化が，「観測可能な物理量は何か？それはどんな数学的表現を持つか？」と問うことを忘れさせ，「全てのエルミート（正確には，自己共役）演算子」が observable だと信じ込まれてきたせいである。Stone-von

Neumann 一意性定理＝ Dirac 変換理論の成り立つ有限自由度量子系の楽園で平和に暮らしているうちは，この見方に何ら不都合はなかった。しかし，ひとたび無限自由度の荒海に乗り出した途端，非同値表現の洪水と共に III 型 von Neumann 環が登場して，Hilbert 空間＋ superposition principle ＋ Dirac 変換理論の描像は破綻し，互いに dual な関係にある物理量の代数と状態とを両方同時に表現論的に取扱う視点が本質的役割を演ずることになる。ここで重要なのは単なる unitary 非同値性ではなく，どんな（ゼロでない）部分表現への制限も unitary 同値にならないという意味での表現の **disjointness** で，disjoint 表現の出現と非自明な中心＝マクロ物理量の存在とは，数学的に同値。すなわち，[disjoint 表現の出現]$\Longleftrightarrow$[非自明な中心＝マクロ物理量の存在]$\Longleftrightarrow$[superselection rule の出現]，ということである。（既約表現に関する disjointness は，もちろん単なる unitary 非同値性に帰着する。）

要約すれば，superselection rule とは，自由度が無限になると必ず出現する disjoint 表現に伴う非自明な中心＝マクロ物理量（物理では，これを order parameters と呼ぶ）の存在，即ち，ミクロ・マクロ共存系の登場ということであり，そこでの (superselection) sectors とは，その中心を「同時対角化」（＝中心分解）して得られる「最小単位」の表現（あるいは，その表現空間）にほかならない。Superselection rules の物理的議論の出発点では，通常，この「最初単位」は既約表現と同一視されたが，代数的量子場理論の展開につれて，有界時空領域 $\mathcal{O}$ 上の局所環 $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ や温度平衡状態における表現代数等，III 型 von Neumann 環が至る所に登場し，その既約分解に一意性がないことが分かると，分解の「最小単位」（正確には，minimal units）は既約表現・純粋状態ではなく，中心が自明（$\mathbb{C}1$）な factor 表現・factor 状態として理解することが重要になる。これを物理的に理解すれば，order parameters が定まった値を持つ状態＝「純粋相」(pure phase) ということにほかならない。したがって，中心＝ order parameter は，その実現値によって sectors ＝ pure phases の一つ一つを識別する役割を担った物理量ということになる。

このように，無限自由度量子系における非同値表現の存在，disjointness, superselection rule and sectors という一見，抽象的・数学的な概念・状況が，実は，ミクロ量子系とマクロ古典系の相互関係を理解する上できわめて重要な役割を演ずる物理的概念・状況にぴったりと対応しているのである。

3 DHR selection criterion と $End(\mathfrak{A})$

さて，上のような superselection sectors の物理的概念が，数学的文脈ではなぜ $End(\mathfrak{A})/Inn(\mathfrak{A})$ という形を取るのか？それを知ることは Doplicher-Haag-Roberts (DHR) 理論への入り口になり，それによって Cuntz 環を物理に登場させる重要な一歩が開かれることになる。

その理解には，次のようなある種の問題設定の《逆転》が重要である：まず，物理における通常の議論では，我々は理論展開の出発点に当たってミクロの「本物の理論」を知っているものと想定し，そこから導出される様々な物理的帰結を実験的検証にかけることによって，最初の仮定が正しかったかどうかを確証あるいは反証しうるのだという構図になっている。そのような

文脈では，最初に我々は対象とする物理系の対称性変換を記述する群 G およびその変換の下で共変的に振舞う量子場が作る field algebra $\mathfrak{F}$ が何かを全て知っていなければならない（し，また知りうるのだと通常信じられている)。この設定の下で物理的直観に相応しい "sector" とは，field algebra $\mathfrak{F}$ の（何らかの意味で最小の）表現空間 $\mathfrak{H}$ を，対称性の群 G の表現に応じて分解したときに現れる最小 (minimal) 単位ということになる。他方，field algebra $\mathfrak{F}$ の中には一般に，Einstein causality（=光速を超える物理的作用の禁止）= 局所可換性，を破る Fermi 統計に従う場も入っていて，その全てが観測可能な物理量に対応するわけではないので，何が観測量かは適切な仕方で指定しなければならない。そこで (2π 回転に対応して Bose-Fermi 統計を区別する "univalence charge" k, $k^2 = 1$, が G の元であるとの前提の下に)，$\mathfrak{F}$ の G-不変量 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{F}^G$ を観測可能な物理量と同定すれば，前節で定義した sector の概念，即ち，相互に disjoint な $\mathfrak{A}$ の factor 表現・状態= pure phase としての sector と，ここでの $(\mathfrak{F}, G)$ から決まる sector の概念とがちょうど一致する，という結果が DHR 超選択理論の重要な出発点になった [2]：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{H} &= \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\mathfrak{H}_\gamma \otimes V_\gamma); \\
\pi(\mathfrak{A})'' &= \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\pi_\gamma(\mathfrak{A})'' \otimes \mathbf{1}_{V_\gamma}) = U(G)', \\
U(G)'' &= \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\gamma} \otimes \gamma(G)'') = \pi(\mathfrak{A})'.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし，$(\pi, \mathfrak{H})$ は field algebra $\mathfrak{F}$ の既約な真空表現，U は内部対称性のコンパクト群 G の $\mathfrak{H}$ における unitary 表現，group dual $\hat{G}$ は G の既約表現 (γ, V_γ) の同値類の全体。$(\pi_\gamma, \mathfrak{H}_\gamma)$ は各 $\gamma \in \hat{G}$ に対応して定まる observable algebra $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{F}^G$ の既約表現として，ちょうどこの状況での sector そのものになる [2]。普段あまり強調されないのだが，前節とのつながりで重要なのは，

$$
\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})' = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\gamma} \otimes \mathbf{1}_{V_\gamma}) \cong l^\infty(\hat{G}) \tag{2}
$$

という形で，sector を parametrize する order parameter(=$\pi(\mathfrak{A})''$ の中心) が $\hat{G}$ 上の変数で与えられることである [3]。

さて，Doplicher, Haag, Roberts が企てた問題設定の《逆転》とは，[$\mathfrak{F}$ & G から $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{F}^G$ とその sector structure を決める] という conventional な構図をひっくり返し，[$\mathfrak{A}$ (+something) だけから逆に $\mathfrak{F}$ & G を決めることは可能か?] という大きな発想の転換であった。$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{F}^G$ という定義および上の sector 構造から $G = Aut_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}) = \{\tau \in Aut(\mathfrak{F}); \tau(A) = A \text{ for } \forall A \in \mathfrak{A}\} =: Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$ となり，$\mathfrak{F}$ は G を Galois 群とする Galois 拡大であるから，$\mathfrak{F}$, G, $\mathfrak{A}$ の 3 項のうち何れか 2 項が決まれば後の 1 項は決まる。しかし，$\mathfrak{A}$ 1 項だけから $\mathfrak{F}$, G 2 項を決めろというのはないものねだりに等しい。そこで問題のカギは "$\mathfrak{A}$ (+something)" の "something" に隠れている。彼等が着目したのは，$G \Longrightarrow \hat{G} \ni \gamma \Longrightarrow \pi_\gamma \in Rep(\mathfrak{A})$ という流れを逆転させる可能性であり，G-charge を持たない真空 $\pi_0 \equiv \pi_\iota$ (ι: G の trivial 表現) から G-charge $\gamma \in \hat{G}$ (を持つ sector π_γ) をどうやって生成させるか?という問題であった。その答が，

真空 sector の世界の中で，反対 charge $\bar{\gamma}$ (s.t. $\iota \subset \gamma \oplus \bar{\gamma}$) を《月の裏側》へ飛ばして γ だけを《地上》に残す，という有名な "Behind-the-Moon" argument であり，その数学的定式化が次の **DHR selection criterion** [2] にほかならない。まず，相対論的量子場理論を記述する基本概念として，時空依存性を持つ物理量を扱うため，領域 $\mathcal{O}$ [$\in \mathcal{K} := \{(a+V_+)\cap(b-V_+); a, b \in \mathbb{R}^4\}$: Minkowski 時空中の double cones] 毎にその中で測定可能な観測量から成る局所 (W*-) 環 $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ を対応させる local net $\mathfrak{A}$ of observables $\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \stackrel{\mathfrak{A}}{\longmapsto} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ を採る。Einstein causality の代数的表現としての局所可換性は，$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' := \{x \in \mathbb{R}^4; (x-y)^2 < 0 \text{ for } \forall y \in \mathcal{O}_2\} \Longrightarrow [\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1), \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$ と表わされ，Poincaré 群の作用が $\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes L_+^\uparrow \ni (a, \Lambda) \longmapsto \alpha_{(a,\Lambda)}(: \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{A}(a+\Lambda(\mathcal{O})))$ で与えられる。Isotony と呼ばれる自然な条件 $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$ を仮定すると，(C*-) 帰納極限として global observable algebra $\mathfrak{A} := C^*\text{-} \varinjlim_{\mathcal{O} \nearrow \mathbb{R}^4} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ が定義され，$\mathfrak{A}$ の状態 ω が double cone 領域 $\mathcal{O}$ に局在した charge を持つ状態として同定されるのは，その領域を任意に時空並進 $\mathcal{O}_a := \mathcal{O} + a$ ($\forall a \in \mathbb{R}^4$) しても，十分遠方では常に真空表現と同一視できるとき：

$$\pi_\omega \restriction_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}_a')} \cong \pi_0 \restriction_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}_a')} . \tag{3}$$

ただし，$\mathfrak{A}(\mathcal{O}') := C^*\text{-} \varinjlim_{\mathcal{K} \ni \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'} \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$。Local net の相対論的共変性や局所可換性，エネルギーの正値性条件等を動員すると，上の selection criterion は次のように，$\mathfrak{A}$ の局所内部準同型を用いて簡潔な形に書き換えられる [2]: [$\mathfrak{A}$ の pure vacuum ω_0 に伴う GNS 表現 $(\pi_0, \mathfrak{H}_0)$ で Haag duality $\pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}'))' = \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))''$ が成り立てば] π_ω が DHR selection criterion (3) を満たすことは，

$$\rho(A) = A \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}') \tag{4}$$

という意味で $\mathcal{O}$ に局在した $\rho \in End(\mathfrak{A})$ が存在して $\pi_\omega = \pi_0 \circ \rho$ が成り立つことと同値。このとき更に π_ω の unitary 同値類は $\pi_\omega \circ Inn(\mathfrak{A}) = \{\pi_\omega \circ Ad(u); u \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$: unitaries in $\mathfrak{A}\}$ で与えられ，結局，$\mathfrak{A}$ の superselection sectors と $[\rho] \in End(\mathfrak{A})/Inn(\mathfrak{A})$ s.t. $\pi_0 \circ \rho(\mathfrak{A})' \cap \pi_0(\mathfrak{A}) = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}_0}$ [: $\pi_0 \circ \rho$ の既約性] とが 1-1 onto に対応することになる。これが $End(\mathfrak{A})/Inn(\mathfrak{A})$ を sector structure の数学的定義として採用する根拠だった。今の文脈でこの同一視は測り知れないほどの意義を持つが，物理的にあり得る sector structures の特殊な場合しかカヴァーしてないことは，種々の仮定の上に成立したその導出過程を振り返れば明らかだろう［これはひょっとして偏見？］。

ともかく，[$\mathfrak{A}$ (+something) $\Longrightarrow \mathfrak{F}$ & G] を可能にするための "+something" が,《states ω characterized by DHR selection criterion $\Longleftrightarrow \pi_\omega = \pi_0 \circ \rho$ with local endomorphisms $\rho \in End(\mathfrak{A})$》という形で用意された。$End(\mathfrak{A})$ の注目すべき点は，その **C*-tensor category** の構造である：objects は endomorphisms；object ρ から object σ への morphism は $T\rho(A) = \sigma(A)T$ を満たす intertwiner $T \in \mathfrak{A}$。DHR selection criterion から導かれる local endomorphisms の全体 $\mathcal{T}$ (*DR category* と略称) は $End(\mathfrak{A})$ の full subcategory

で，DHR が提起した問題は，[$\mathfrak{A}$ & $\mathcal{T}$: DR category $\Longrightarrow \mathfrak{F}$ & G] という導出機構が存在するか？ということに帰着される。

Bosonic fields のみからなる $\mathfrak{A}$ から unobservable fermionic fields を含む $\mathfrak{F}$ を recover し，spin と統計の関係を導出することや，内部対称性の群 G が可換群になる場合は，DHR の後半２編の論文で７０年代前半に基本的に解決された。しかし，G が非可換な場合へそれを拡張することには予想外の年月を要し，'90 年に至って漸く解決された [4]。そこで本質的役割を演じたのが実は Cuntz 環だったというわけである [5, 4]。

4 DR category $\longleftrightarrow \mathcal{O}_\rho$ and $\mathcal{O}_{d(\rho)}$

$\mathfrak{F}$ & G から sector structure を抽出する DHR analysis の帰結 (1), (2) を見ると，[$\mathfrak{F}$ & G] を再構成するのに必要な [$\mathfrak{A}$ (+something)] の something が $\hat{G}$ の情報に密接につながっていることは容易に分かる。そしてひとたびそれが完全に分かれば，Fourier duality のさまざまな一般化として，G: abelian の場合によく知られた Pontrygin duality，それを非可換コンパクト群に拡張した淡中-Krein duality（局所コンパクト群なら，辰馬 duality）によって，G を再現することが可能になると期待するのは自然である。ところが，DR category $\mathcal{T}$ の抽象的データから双対定理の適用に必要な各 $\gamma \in \hat{G}$ の表現空間 V_γ に応じた intertwiners の具体的情報を引き出すことは直接には不可能。もし field algebra $\mathfrak{F}$ が既知ならば G は $G = Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$ として抽象的に定まるだけではない。真空表現が満たす $\pi_0(\mathfrak{A})' \cap \mathfrak{F} = \mathbb{C}\mathbf{1}$ より，$\rho \in \mathcal{T}$ に対して

$$H_\rho := \{\psi \in \mathfrak{F}; \psi A = \rho(A)\psi \text{ for } \forall A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{F} \tag{5}$$

で algebra $\mathfrak{F}$ 内に Hilbert 空間 H_ρ が定義され [$\because$) $\psi_1, \psi_2 \in H_\rho \Longrightarrow (\psi_1^*\psi_2)A = \psi_1^*\rho(A)\psi_2 = (\rho(A^*)\psi_1)^*\psi_2 = A(\psi_1^*\psi_2) \Longrightarrow (\psi_1^*\psi_2) \in \pi_0(\mathfrak{A})' \cap \mathfrak{F} = \mathbb{C}\mathbf{1}$]，その上に G の unitary 表現 γ_ρ が $\gamma_\rho(g)\psi = g(\psi)$ で定まる。そして ρ から σ への intertwiner $T \in \mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ が G-表現の intertwiner になる：

$$\begin{aligned}(T\psi)A &= T\rho(A)\psi = \sigma(A)T\psi \Longrightarrow T\psi \in H_\sigma; \\ T\gamma_\rho(g)\psi &= Tg(\psi)A = g(T\psi) = \gamma_\sigma(g)(T\psi) \Longrightarrow T\gamma_\rho(g) = \gamma_\sigma(g)T.\end{aligned}$$

（$\mathcal{T}$ の各 ρ 毎に反粒子に対応した conjugate $\bar{\rho}$ が存在すれば，H_ρ の有限次元性が保証され G はコンパクト群であることもわかる。）逆に，コンパクト群 G が既知なら $\hat{G}$ の $\mathfrak{A}$ への双対作用による接合積として $\mathfrak{F}$ を作ることが可能。しかるに，今は $\mathfrak{F}$ も G も未知！

この袋小路から抜け出すために Doplicher-Roberts が用いたのは，Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ と $\rho \in \mathcal{T}$ から彼等が構成した環 $\mathcal{O}_\rho$ である [5]。詳細にこだわらずストーリーだけを追ってみよう。Conjugate $\bar{\rho}$ が常に存在するという条件の下に DR category $\mathcal{T}$ の構造を詳しく調べると，各 $\rho \in \mathcal{T}$ に対して統計次元 $d(\rho) \in \mathbb{N}$ が有限に定まる。その状況で $\mathcal{T}$ は有限生成的であり，$d(\rho)(\neq 1)$ の最小値に対応する ρ を一つ取ればそれがコンパクト Lie 群としての G の基本表現に対応することが後に判明する。今そのような $\rho \in \mathcal{T}$ に対して ρ のべ

き ρ^n の間の intertwiners から生成される *-環を $\mathcal{O}_\rho(\subset \mathfrak{A})$ と定義するとそれは simple C*-環になる。局所可換性に由来して $\mathcal{T}$ 内に定義される置換群の表現および determinant map を用いると，埋込み $\mathcal{O}_d^{SU(d)} \hookrightarrow \mathcal{O}_\rho$ が定義される。ただし，以下 $d(\rho) \equiv d$ と略記する。

そこで，後述の仕方で接合積 $\mathcal{O}_\rho \underset{\mathcal{O}_d^{SU(d)}}{\otimes} \mathcal{O}_d$ を定義し，その中心 $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_\rho \underset{\mathcal{O}_d^{SU(d)}}{\otimes} \mathcal{O}_d)$ の spectrum を動かさない stabilizer group G を $SU(d)$ の subgroup として定義すると，同型 $\mathcal{O}_\rho \simeq \mathcal{O}_d^G$ が成り立ち，これによって，埋込み写像 $\mu : \mathcal{O}_d^G \hookrightarrow \mathfrak{A}$ が定まる。こうして任意の有限次元 G-module を $d = d(\rho)$ 次元の基本表現の空間から生成された Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ の中に埋込むことにより，Hilbert 空間とその間の有界作用素が作る category $Hilb$ の中に DR category $\mathcal{T}$ を埋込む C*-tensor functor $V : \mathcal{T} \hookrightarrow Hilb$ が定まる。$End_\otimes(V)$ を，V から V 自身への unitary な自然変換 $g = (g_\rho)_{\rho\in\mathcal{T}} : V \dot{\to} V$:

$$
\begin{array}{cccc}
\rho_1 & V_{\rho_1} & \overset{g_{\rho_1}}{\to} & V_{\rho_1} \\
T\downarrow & T\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow T \\
\rho_2 & V_{\rho_2} & \overset{g_{\rho_2}}{\to} & V_{\rho_2}
\end{array}
$$

が作る群とすれば，これは上に定義された G と一致し，V による $\mathcal{T}$ の像がちょうど，コンパクト Lie 群 $G \subset SU(d)$ の unitary 表現全体が作る category $RepG$ になる：$\mathcal{T} \simeq RepG \Longleftrightarrow G = End_\otimes(V)$: 淡中-**Krein** 双対性。
実際，$g_\rho = \gamma_\rho(g)$ と置いて，上の可換図式 $Tg_{\rho_1} = g_{\rho_2}T$ を書き直せば $T\gamma_{\rho_1}(g) = \gamma_{\rho_2}(g)T$ となり，$\mathcal{T} \subset End(\mathfrak{A})$ における ρ_1 から ρ_2 への intertwiner T が群表現 γ_{ρ_1} から γ_{ρ_2} への G-intertwiner と一致するので，$End_\otimes(V)$ は G-表現の表現 (bi-representation) として G 自身に一致することになる。

接合積の定義 $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d$ は，まず linear structure について，

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & \dashrightarrow & \mathfrak{F} \\
\mu\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{O}_d^G & \hookrightarrow & \mathcal{O}_d
\end{array}
\tag{6}
$$

を可換図式にする universality problem の解として $\mathfrak{F}$ を定義する。次に，Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ の generators を ψ_i, $i = 1, 2, \cdots, d$, $\psi_i^*\psi_j = \delta_{ij}\mathbf{1}$, $\sum_{i=1}^d \psi_i\psi_i^* = \mathbf{1}$, canonical endomorphism を $\sigma(C) := \sum_{i=1}^d \psi_i C\psi_i^*$ $(C \in \mathcal{O}_d)$ として，埋込み写像 $\mu : \mathcal{O}_d^G \hookrightarrow \mathfrak{A}$ が $\mu\circ\sigma = \rho\circ\mu$ を満たすことを利用して，$\mathfrak{F}$ に積構造を

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \psi_{i_1}\cdots\psi_{i_r}\psi_{j_1}^*\cdots\psi_{j_s}^*)(A_2 \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} C) \\
&= [(-1)^{d-1}d^{1/2}]^s A_1\rho^r(\underbrace{R^*\rho^{d-1}(\cdots(R^*\rho^{d-1}}_{s}(A_2))\cdots) \\
&\quad \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \psi_{i_1}\cdots\psi_{i_r}\hat{\psi}_{j_1}\cdots\hat{\psi}_{j_s}C
\end{aligned}
\tag{7}
$$

で定義する。ただし，$A_i \in \mathfrak{A}$, $\psi_i \in h_d$, $C \in \mathcal{O}_d$。$\mathbb{P}_d(i)$ は $p(1) = i$ となる $1, 2, \cdots, d$ の permutation p の部分集合として

$$\hat{\psi}_i = 1/\sqrt{(d-1)!} \sum_{p \in \mathbb{P}_d(i)} sgn(p)\psi_{p(2)} \cdots \psi_{p(d)}, \tag{8}$$

$$R = 1/d^{1/2}\mu(\sum_{i=1}^{d} \psi_i \hat{\psi}_i) \in \mathcal{T}(\iota, \rho^d) \tag{9}$$

と置く。このとき，関係 $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{F} = \mathbb{C}1$ が成り立ち，それによって，すべての G-表現が $\mathfrak{F}$ に含まれることが保証される [6, 4]。$\mathfrak{F}$ の local net structure は $\mathfrak{F}$ 内に Hilbert spaces H_ρ, $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$, を (5) によって定義し，それらで生成される local W*-algebras を局所部分環 $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$ として採れば，

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \hookrightarrow & \mathfrak{F} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{A}(\mathcal{O}) & \hookrightarrow & \mathfrak{F}(\mathcal{O}) \\ \mu_{\mathcal{O}}\uparrow & & \uparrow\zeta_{\mathcal{O}} \\ \mathcal{O}_d^G & \hookrightarrow & \mathcal{O}_d \end{array} . \tag{10}$$

を可換図式にするよう整合的に定義できる。

改めて，結果を振り返ってみよう：

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d \qquad \curvearrowleft \quad G = End_{\otimes}(\mathcal{T} \hookrightarrow Hilb) = Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A}).$$

接合積 $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d$ による field algebra の構成は，$\mathfrak{A}$ の Galois 拡大（$\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ + $G = Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$）の関与を表わす一方，Galois 群 G 自身は群とその表現の間に成り立つ淡中-Krein duality から決定された。こうして得られた接合積の表式 $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d$ それ自体の物理的意味は，量子場 $\mathfrak{F}$ を，時空に依存し内部対称性に依らない部分 ($\mathfrak{A}$) と時空に依らず内部対称性の群 G の作用のみを受ける部分 ($\mathcal{O}_d$) に分解し，その両者を合成したものと見る視点を与える。そして，後者 $\mathcal{O}_d$ の意味は，群 G の基本表現の空間 $H_\rho = Lin\{\psi_1, \cdots, \psi_{d(\rho)}\}$ のテンソル積によって生成され，Weyl 流の表現論展開に文字通り「代数的な」舞台を提供するところに見出される。

5 《Selection criteria⟹generalized sectors》によるミクロ・マクロの統一的理解

大略以上のような内容を持つ D(H)R セクター理論は，その高度の数学的抽象性ゆえに（数学は別として）物理学の領域では今まで殆ど誰も真剣に振り返らなかったが，その意義は単に数学的理論としての面白さや，Braid 統計・量子群の基礎を与えるということだけで尽きるものではない。

常に明示された形で現れるとは限らないとしても《マクロとミクロの相互関係》という問題が，物理の殆どの議論で通奏低音として重要な背景的役割を担っているのは否定し得ない。(全く新しい未知の現象を前にしてそれをどう理論化すべきか考える，というような「画期的」場面を別にすれば）普通，確立されたミクロの基礎理論の道具立てをどう組み合わせて，議論の対象となった「現象」＝マクロを導出するか？という方向でものを考えるのが，理論の立場からこの問題を扱う基本的設定である。つまり，[ミクロからマクロへ]が理論家にとっての基本ベクトルになっている。確かに，今日「標準模型」と呼ばれる素粒子論の基本構成は，強い相互作用を記述する colour $SU(3)$, 弱電磁相互作用を記述する chiral $SU(2)\times U(1)$ の群対称性とそれに基づく局所ゲージ不変性で，その仮定から導出された理論的予言は高い精度の実験的検証に耐え，今のところ反証データは知られていない。

けれども，対称性の群 G の下で non-trivial に振舞う量子場 $\hat{\varphi}^i(x)$ それ自体が観測可能な observable ではなく，基本量の G-不変な組み合わせしか観測にかからないということは，つまり，[実験データ＝G-不変量] から [対称性の群 G および G の下で非自明に振舞う基本的量子場 $\hat{\varphi}^i(x)$ たちのつくる field algebra $\mathfrak{F}$] を推測する，という論理の「飛躍」を含むことを意味する。では出発点で採用した G & $\mathfrak{F}$ の選択は，どのように根拠づけられるのか？それは，仮定から導かれた理論的帰結の実験的検証を通じて，というほかあり得ない。たとえ「理論と実験の一致」が上のように高い精度のものであったとしても，理論的前提から導かれた有限個の予言の有限精度での実験的検証は，「可能な一つの十分条件」としてその前提を肯定するに過ぎず，最終的にそれを一意解として正当化することにはなり得ない。もちろん「完全な」根拠づけなど最初から望むべくもないことは明らかだとしても，現代における物理的自然の最も基礎的なレベルを記述する量子論の基本構造がこうした ad hoc な要素を含むという問題を，どう考えるべきか？

普通このような [マクロからミクロへ] という方向が問題になるのは，現象・実験から得られた事実・データから出発し，それを説明するためのミクロの普遍法則・理論を探る場面に限られ，そこで本質的な役割を演ずるのは帰納的・発見法的な方法である; この飛躍は直観に委ねるべきもので，理論の対象にはなり得ないものだと説明される。果たしてそれで十分か？実は理論的帰結の物理的解釈・実験的検証という日常的な場面においても，例えばミクロ状態の準備過程一つとっても明らかなように，注意深く検討してみれば，[ミクロからマクロへ] という一方向だけでなく，ミクロ・マクロの間を往復する論理を我々は本質的に使っている。もし [マクロからミクロへ] を扱う理論的仕組みがなかったとすれば，我々の物理理論は [aprioirism starting from *ad hoc* postulates ＝ 十分な根拠なく ad hoc に選んだ前提から出発する a priori な理論展開] に終始し，その ad hoc postulates の正当化は不可能，という事態に陥ってしまう。

この文脈に Sec.3 で見た DHR による問題設定の《逆転》，[$\mathfrak{A}$ & $\mathcal{T} \Longrightarrow \mathfrak{F}$ & G] を置いたらどうなるだろうか？DHR および Doplicher-Roberts のセクター理論に備わる数学的メカニズムが果たす物理的な役割とは，まさにこの [マクロからミクロへの gap] を理論的に埋める可能性にこそ見出されるのではないか？

ただし注意を要するのは，前節までに概観した理論から帰結する内部対称性は，大域的ゲージ不変性で，かつ常に **unbroken** [$\mathfrak{F}$ の真空表現が G-不変で G の unitary implementer U を持つゆえ]，という点である。他方，自然界で重要な殆どの対称性には，（自発的）破れ and/or 局所ゲージ不変性が絡んでいる。それらに手が届かない現状で，セクター理論に従って素粒子論の「標準模型」における内部対称性の群 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ の正しさを，実験データからチェックしようとした人が誰もいないとしても，別段驚くには当たらない。しかし重要なのは，この理論に内在する上のような文脈での本質的「メカニズム」，それが有する理論的可能性である。

とすれば，自発的に破れた対称性の場合にセクター理論の本質がどのように拡張されるか (I.O. [3]) の検討がきわめて重要になってくる。それだけではない，もし万一セクター理論から導かれる対称性が原理的に《破れを許容しない》となれば，いくら数学的に美しくとも理論の物理的「安定性」に対する深刻な疑義 (Flato's question, '96) を生じ，物理理論としての存在理由がセクター理論から奪われかねなくなる。[3] で得た結論は「その心配なし」，ということだが，それを保証するにはいくつかの概念・前提の本質的拡張が必要になった。ここでは，その理論的エッセンス及びこの理論が内包する物理的含意を，[**selection criteria** for relevant states および種々の **duality** を通じてそこから導出されるセクター構造] に求め，それに基づいて物理的自然の諸領域・その階層的構造を統一的に理解するための理論的枠組の可能性を探ってみよう。ポイントは２つあって，

1. Doplicher-Roberts 理論でのコンパクト群に付随するセクター構造に特徴的な「離散セクター」を拡張して，「連続セクター」を取り込む必要性，

2. selection criterion とセクター構造との関係（特に，群 G と $\hat{G}$ and/or $RepG$ との duality を，等質空間とその表現の duality に拡張する必要），order parameter の役割等に関する論理的一般的理解の必要性，

ということである。これによって，selection criteria とそれから従うセクター構造および order parameters のなす「分類空間」等の基本要素が，[generic な対象を着目した観点から同定すると同時に，対象の物理的記述・解釈の確定] において果たす重要な数学的物理的役割が明らかになり，新しい統一的記述の枠組の展望が開かれる。その際，上記 1., 2. の視点に基づく DR theory と非平衡局所状態の一般的定式化（詳しい内容は文献 [7, 8, 9] を参照）との比較が有益で，そこから **selection criteria** に基づいて異なる階層諸領域を統一的に扱うための枠組 [3] が明らかになる。図式化すれば：

$$\text{i)} \left[(q:) \begin{array}{c} \text{generic objects} \\ \textit{to be selected} \end{array} \right] \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \text{ii)} \left[\begin{array}{c} \textit{standard reference } \text{system} \\ \text{with } \textit{classifying space} \text{ of } \textit{sectors} \end{array} (:c) \right]$$

$$\text{iii) map to } \textit{compare} \text{ i) with ii)}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\text{iv)} \left[\begin{array}{c} \textit{selection criterion:} \\ \text{ii)} \underset{\textit{c-q channel}}{\Longrightarrow} \text{i)} \end{array} \right] \underset{\textit{adjunction}}{\overset{\text{categorical}}{\rightleftarrows}} \left[\begin{array}{c} \textit{interpretation} \text{ of i) in terms of ii):} \\ \text{i)} \underset{\textit{q-c channel}}{\Longrightarrow} \text{ii)} \end{array} \right]$$

この観点からセクター理論を見直し，複雑に入り組んだ Doplicher-Roberts 理論の数学的内容から物理的含意を抽出しよう。Observable algebra $\mathfrak{A}$ 上の pure state $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ を DHR selection criterion $\pi_\omega \upharpoonright_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}_a')} \cong \pi_0 \upharpoonright_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}_a')}$ によって局在した charge を持つ状態として選び出し，フローチャート：DHR-selected state $\omega \in E_{\mathfrak{A}} \overset{\text{GNS-rep.}}{\Longrightarrow} [\pi_\omega \in \{\pi_0 \circ \rho; \rho \in \mathcal{T}\}(\subset Rep\mathfrak{A})] \overset{\text{DHR}}{\Longleftrightarrow} [\rho_\omega \in \mathcal{T}(\subset End(\mathfrak{A})) \overset{\text{DR}}{\simeq} RepG] \Longleftrightarrow [\gamma_{\rho_\omega} \in \hat{G}(\subset RepG)]$，に掛けてその意味を読み解くと最後には，field algebra $\mathfrak{F}$ の既約真空表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ の中で状態 $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ が属するセクター $(\pi_\gamma, \mathfrak{H}_\gamma)$ が《ω が担う G-charge $\gamma_{\rho_\omega} \in \hat{G}$》というデータの形で output される。この process には物理量の測定に密着した operational な意味づけが可能で，$Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A})) = \hat{G}$ は select された charged states の G-charge contents を記述するための分類空間として機能する (I.O. [3])。これは，熱力学的純粋相 (= pure phases = sectors) を分類する温度その他の熱力学的マクロパラメータの空間が，非平衡局所状態を熱力学的に解釈する際に演ずる役割と同じである。

非平衡局所状態の議論との平行性と同時に重要な違いにも注目したい：後者の場合，select した状態の解釈を与える参照基準系は既知であったのに対し，内部対称性に伴う D(H)R セクター理論では，selection criterion から出発して，[DHR-selected representations of $\mathfrak{A}$] $\Longleftrightarrow$ [Doplicher-Roberts category $\mathcal{T}$] $\Longleftrightarrow$ [$RepG$ and G] $\Longrightarrow$ [$\hat{G} = Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}))$] という Fourier-Galois 双対性を核とする論理の鎖を辿った後に初めて，参照基準系 $\hat{G}$ が確定する。これは，既知のマクロから未知のミクロへの理論的進行，という事情に適合したものであり，標準的な「発見法的」議論は，このステップを理論的に考察することを放棄し，直観に委ねることにほかならない。

6 SSB への拡張と unified scheme

対称性の自発的破れ (SSB) の議論では，Doplicher-Roberts セクター理論における unbroken symmetry からくる離散セクターと，連続的な巨視的熱的 order parameter で parametrize された連続セクターを持つ非平衡局所状態の議論の両者を融合して，以下のように，連続・離散セクターを扱わねばならない。

- SSB$\Longrightarrow$ Haag duality の破れ [10]: $\mathfrak{A}^d(\mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' \neq \mathfrak{A}(\mathcal{O})$
(もし $\mathfrak{A}^d = \mathfrak{A}$ なら DR theory により unbroken symmetry！) Dual net $\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}^d(\mathcal{O})$ の局所可換性は，essential duality $\mathfrak{A}^{dd} = \mathfrak{A}^d$ の要請と同値で，Wightman-type QFT では常に満たされる自然な性質。このとき dual net $\mathfrak{A}^d$ は，元の local net $\mathfrak{A}$ を含み，局所可換性を満たす最大の local net (consisting of ***Borchers-class observable fields***)。

- $\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{A}^d$ の置き換えで，前節の議論は全て再現される：
$\mathfrak{F} := \mathfrak{A}^d \underset{\mathcal{O}_{d_0}^H}{\otimes} \mathcal{O}_{d_0}$, $\mathfrak{A}^d = \mathfrak{F}^H$,
$H = Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A}^d) \subset SU(d_0)$, $\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}^d) = l^\infty(\hat{H})$

- 自発的破れの一般的定義 (I.O. [3])：

Definition 1 群 G による *field algebra* $\mathfrak{F}$ 上の (強連続な) 自己同型作用で記述される対称性は，$\mathfrak{F}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ における中心 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{Z}(\pi(\mathfrak{F})'')$ の *spectrum* の各点 (正確には，表現 π の中心分解に現れる中心測度 μ に関し殆ど至る所) が G の作用で不動なら，この表現において ***unbroken*** であると言う。そうでない時，表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ において自発的に破れているという。

Remark 2 対称性の自発的破れの本質は，*unitary implementability* と *factor* 表現 *(=triviality of centres)* との間の不整合 *(I.O. '99)*。中心は低エネルギーモードとしての *order parameter* であり，それが G の作用で動くというのは，「赤外不安定性」という物理的表現にちょうど合致する。

Remark 3 上の *SSB* の定義は，*broken, unbroken* な部分表現の共存状況を許す。$Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{F}))$ をこれ以上分解できない G-不変な部分領域にまで分割すれば，対応する表現は *central ergodicity* によって特徴づけられる。こうして任意の表現は，*G-unbroken factor* 表現と *centrally G-ergodic non-factor* 表現との直和に分解され，中心の *spectrum* 上に ***phase diagram*** が描かれる。

- 問題は，自発的に破れた内部対称性を記述する群 G およびそれが作用する field algebra をどのように定義するのがもっとも自然か？ということ $\Longrightarrow$ How to identify field algebra (IO):
  - コンパクト対 $H \hookrightarrow G$ に対する有限次元誘導表現：
    H の任意の有限次元 unitary 表現 (η, W) は H の適当な表現 (η', W') と直和をとることによって G の表現 (γ, V) に拡張することができる：$\gamma|_H \cong \eta \oplus \eta'$。
  - Field algebra 構成法の安定性と整合性：

    Proposition 4 (Nozawa-I.O.) (*Dual-net algebra* $\mathfrak{A}^d$ が固有無限 C^*-環ならば) $\mathfrak{A}^d$ と *Cuntz* 環 $\mathcal{O}_{d_0}$ の接合積として作られた *field algebra* $\mathfrak{F}$ は，$\mathfrak{A}^d$ および次数 $d(> d_0)$ の *Cuntz* 環 $\mathcal{O}_d$ との接合積と同型*:*

$$\mathfrak{F} := \mathfrak{A}^d \underset{\mathcal{O}_{d_0}^H}{\otimes} \mathcal{O}_{d_0} \cong \mathfrak{A}^d \underset{\mathcal{O}_d^H}{\otimes} \mathcal{O}_d.$$

次数 d を動かすこの自由度を利用すると，次元 $d(> d_0)$ の基本表現を持つ compact Lie 群 $G(\supset H)$ が $\mathfrak{F}$ に自然に作用するようにできる：$g(\mathfrak{A}^d) = \mathfrak{A}^d$ を満たす $g \in G$ は正規化群 $N_H := \{s \in G; sHs^{-1} \subset H\}$ の元だけだが，G の $\mathfrak{F}$ への作用は次の意味で整合的：

$$g(\mathfrak{A}^d) \underset{\mathcal{O}_d^{gHg^{-1}}}{\otimes} g(\mathcal{O}_d) = g(\mathfrak{A}^d \underset{\mathcal{O}_d^H}{\otimes} \mathcal{O}_d) = \mathfrak{F}.$$

この結果，SSB の場合の field algebra 構成は $\mathfrak{F} := \mathfrak{A}^d \underset{\mathcal{O}_{d_0}^H}{\otimes} \mathcal{O}_{d_0}$ で十分であり，これ以上の拡大は本質的には必要ではない（G: compact の仮定が許される限り）。

– 群 G of SSB の定義： $G := Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A}) = \{g \in Aut(\mathfrak{F}); g(A) = A$ for $\forall A \in \mathfrak{A}\} \supset H$ ($\because$) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^d$)。この G については，compact or locally compact かも Lie 群であるかも，一般には保証がない。

- (Generalized) sector としての"縮退真空"：この物理的視点は上の自発的破れの一般的定義から自然に導かれる。この視点でのセクター解析および外場との coupling の扱いには，拡大された field algebra $\hat{\mathfrak{F}} := \Gamma(G \underset{H}{\times} \mathfrak{F})$ (I.O.) の導入が便利。（技術的詳細は省略）
- セクター構造を決めるのは次の中心の情報：

Proposition 5 (I.O. [3])

$$\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{F}) = L^\infty(H\backslash G; d\dot{g}) = \mathfrak{Z}_{\hat{\pi}}(\hat{\mathfrak{F}});$$
$$\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{A}) = \mathbf{1}_{L^2(G/H,d\dot{g})} \otimes \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) = \mathbf{1}_{L^2(G/H,d\dot{g})} \otimes l^\infty(\hat{H});$$
$$\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{A}^d) = L^\infty(H\backslash G; d\dot{g}) \otimes \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}^d) = L^\infty(H\backslash G; d\dot{g}) \otimes l^\infty(\hat{H}).$$

（ただし，$\bar{\pi}$ は H-共変条件 $\psi(gh) = U(h^{-1})\psi(g)$ $(g \in G, h \in H)$ を満たす $\psi \in L^2(G; \mathfrak{H})$ の上で

$$(\bar{\pi}(F)\psi)(g) := \pi(\tau_{g^{-1}}(F))\psi(g) \qquad (F \in \mathfrak{F})$$

によって定義される $\mathfrak{F}$ の表現。$d\dot{g}$ は等質空間 $H\backslash G$ 上の Haar 測度。）
［Selection criterion $\Longrightarrow$ 物理的解釈］の基礎になる c-q channel は $\mathfrak{A}^d$ 上で定義される次の Ψ の dual map:

$$\Psi : \mathfrak{A}^d \ni B \longmapsto \Psi(B) \in C(H\backslash G) \otimes \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}^d),$$
$$[\Psi(B)](\dot{g}, \eta) := (\omega_0 \circ \rho_\eta \circ m_H)(\tau_{g^{-1}}(B)) \quad \text{for } (\dot{g}, \eta) \in (H\backslash G) \times Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}^d)).$$

ρ_η: $\mathfrak{A}^d$ 上の DR-category $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}^d}$ に属する局所内部準同型，$g \in G$ は $\dot{g} = Hg \in H\backslash G$ の任意の代表元。

ここでもっとも重要なことは，対称性自滅の原因である Haag duality の破れ $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^d$ のために，本来，G-不変ではない $\mathfrak{A}^d = \mathfrak{F}^H$ の元が観測可能量となり，それによって縮退真空を parametrize する order parameter $\dot{g} \in H\backslash G$ が測定可能になるということ
$\Longrightarrow$ 離散・連続セクターの統一的扱い。

- コンパクト群に対する淡中-Krein 双対性の等質空間 $H\backslash G$ への拡張：

表現 category $RepG$, $RepH$, $RepH\backslash G$ の相互関係 $RepH\backslash G \hookrightarrow RepG \twoheadrightarrow RepH$ の正確な意味は，$RepH\backslash G$ を homotopy fibre に持つ $RepH$ 上

の *homotopy-fibre category RepG* として解釈可能 (S. Maumary)。H の自明表現 $\iota \in RepH$ 上の homotopy fibre は，等質空間 $H\backslash G$ の線型表現 (岩堀-杉浦, 1966) に一致する (I.O.)。

- Order parameter, Goldstone modes の解釈：

 i) $H\backslash G \ni \dot{g}$： 0-energy mode としての縮退真空を parametrize する order parameter="condensate"。例えば，Heisenberg 強磁性体の磁化や Josephson 効果の場合には Cooper pair の位相差として抵抗なしの Josephson 電流等，重要な物理的効果を引き起こす。この変数の動力学的効果が問題となる状況では，上の拡大された field algebra $\hat{F}$ が外部変数との coupling において物理的意味を持つ。

 ii) $\dot{g} \in H\backslash G$ で指定された pure vacuum 上の励起状態に関する内部対称性のスペクトル $\hat{H}$: これについては，関係 $\pi(\mathfrak{A})'' = \pi(\mathfrak{A}^d)''$, $\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}^d) = l^\infty(\hat{H})$ により，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}^d$ の間に本質的な違いはない。

 iii) *Goldstone mode*：局所レベルでは gap $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subsetneqq \mathfrak{A}^d(\mathcal{O})$，大域レベルでは gap $\bar{\pi}(\mathfrak{A})'' \subsetneqq \bar{\pi}(\mathfrak{A}^d)''$ の原因となる $H\backslash G$ に関係したモード。これらの gap の origin は，代数的には $\hat{G}$ の $\mathfrak{F}^G$ への co-action δ による接合積として得られる

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^G \rtimes_\delta \hat{G}; \qquad \mathfrak{A}^d = \mathfrak{F}^H = \mathfrak{F}^G \rtimes_\delta \widehat{(H\backslash G)},$$

の関係（W*-version では，Nakagami-Takesaki, LNM**731**,1979）により自然に理解される。後者の関係は，$\mathfrak{A}(\subset \mathfrak{F}^G)$ と $\mathfrak{A}^d$ の gap が $H\backslash G$ に関係した $\mathfrak{A}^d$ の G-non-invariant な元に由来することを明示し，これが局所的な *Goldstone mode* である（ただし，長距離相関の振舞によっては massless Goldstone spectrum が不在のこともあり得る）。これを理解するには，[pure vacuum ω_0 の G-不変性の破れ，$\omega_0(\tau_g(\varphi)) \neq \omega_0(\varphi)$ $(g \in G\setminus H)$，をもたらす物理的自由度 φ] = [Goldstone mode] $\Longrightarrow$ [i) 縮退真空の G-orbit $\{\omega_0 \circ \tau_g\ ;\ g \in G\} \simeq G/H = Spec(\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{A}^d))$ due to $\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{A}^d) = L^\infty(G/H) \otimes \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) = L^\infty(G/H) \vee \mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{A})$] という関係によって，$\mathfrak{A}^d$ も局所部分環 $\mathfrak{A}^d(\mathcal{O})$ も非自明な中心を持たないのに，表現レベルで大域的には存在する非自明な中心の元 $L^\infty(G/H) \subset \mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathfrak{A}^d)$ が，$\mathfrak{A}^d$ 内の適当な局所的要素の列の極限として実現され，これが G/H に関わる Goldstone mode と同定される。この意味で，上の関係式は Goldstone 定理または低エネルギー定理の代数的 version であり，i) の縮退真空という state level で表現された SSB-sector structure を，代数的・局所的レベルで *dual* かつ virtual な形で記述する。virtual というのは，異なる真空の間の現実的な遷移ではなく，pure vacuum の中で存在するものだからであり，その意味で，"G/H に関係した Goldstone degrees of freedom は縮退真空を virtual に search する" という直観的描像を正当化する。

iv) *Goldstone multiplet*: Goldstone modes および i) の源としての *condensates* を合わせて作られる $\mathfrak{F}$ の multiplet で,《等質空間 $H\backslash G$ の線型表現》である G の線型表現の base を供給するもの。

上のような形で分析の対象とする領域毎に適切な selection criterion を設定し，関与する状態を選び出してその物理的解釈を確定すると共に，ミクロとマクロの間に横たわる種々異なる階層間の関係を selection criteria 相互の関係として解析することを通じて，階層間の移行関係を明らかにする道が開けることが期待される。

References

[1] Haag, R., *Local Quantum Physics* (2nd. ed.), Springer-Verlag (1996); 荒木不二洋, 量子場の数理 (岩波講座 現代の物理学 **21**, 1992)

[2] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Comm. Math. Phys. **13**, 1 (1969); **15**, 173 (1969); **23**, 199 (1971); **35**, 49 (1974).

[3] Ojima, I., *A Unified Scheme for Generalized Sectors based on Selection Criteria*, to appear in Open Systems and Information Dynamics **10** (2003); e-print: math-ph/0303009.

[4] Doplicher, S. and Roberts, Comm. Math. Phys. **131**, 51 (1990).

[5] Doplicher, S. and Roberts, J.E., Ann. Math. **130**, 75 (1989); Inventiones Math. **98**, 157 (1989).

[6] Doplicher, S. and Roberts, J.E., J. Operator Theory **19**, 283-305 (1988).

[7] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Ann. Phys.(N.Y.), **297**, 219 (2002).

[8] Ojima, I., *Non-Equilibrium Local States in Relativistic Quantum Field Theory*, pp. 48-67 in Proc. of Japan-Italy Joint Workshop on Fundamental Problems in Quantum Physics, Sep. 2001, eds. L. Accardi and S. Tasaki (World Scientific, 2003).

[9] Ojima, I., *How to formulate non-equilibrium local states in QFT?– General characterization and extension to curved spacetime–*, to appear in "*Garden of Quanta*" (World Scientific Publ. Co.); cond-mat/0302283.

[10] Roberts, J. E., in Proc. International School of Mathematical Physics, Camerino 1974, ed. G. Gallavotti, Università di Camerino, 1976.